6. Niech $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie trzykrotnie różniczkowalna. Załóżmy ponadto, że spełnione są warunki:

- $f(0) = f(2) = 0, f(1) < 0$,
- dla wszystkich $x \in [0, +\infty)$ zachodzi nierówność $f''' > 0$.

Wykazać, że $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Rozwiązanie. Skoro $f(0) = f(2) = 0$, ale $f(1) < 0$, a f jest funkcją różniczkowalną na całej dziedzinie, to na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieją punkty $a_1 \in (0, 1), a_2 \in (1, 2)$ takie, że

$$f'(a_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) < 0,$$
$$f'(a_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -f(1) > 0.$$

Podobnie, skoro f' także jest funkcją różniczkowalną, to istnieje punkt $b \in (a_1, a_2)$ taki, że

$$f''(b) = \frac{f'(a_2) - f'(a_1)}{a_2 - a_1} > 0.$$

Wiemy, że f''' jest stale dodatnia, a w związku z tym f'' jest ściśle rosnąca na całej dziedzinie. Skoro $f''(b) > 0$, a $a_2 > a_1$, to w szczególności f'' jest stale dodatnia na $[a_2, +\infty)$. W takim razie f' jest ściśle rosnąca na $[a_2, +\infty)$, czyli $f'(x) \geqslant f'(a_2)$ dla każdego $x \geqslant a_2$. Przyjmując $c := f'(a_2)$, otrzymujemy więc

$$f(x) \geqslant c(x - a_2) + f(a_2)$$

dla wszystkich $x \geqslant a_2$. Skoro $c > 0$, to $\lim_{x\to+\infty}(c(x - a_2) + f(a_2)) = +\infty$, więc z twierdzenia o dwu funkcjach także $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.