Zadanie. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in (0, \pi/2)$ spełniona jest nierówność

$$|\ln(2-\sin x) - \ln(2-\sin y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|x-y|. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję $f\colon (0,\pi/2) \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = \ln(2-\sin x)$. Funkcja ta jest różniczkowalna na $(0,\pi/2)$. (Wynika to z tego, że f jest złożeniem funkcji różniczkowalnych oraz $(2-\sin x) \in (1,2) \subset (0,\infty)$ dla $x \in (0,\pi/2)$.)

Niech $x, y \in (0,\pi/2)$. Jeśli $x = y$ wówczas nierówność (1) jest spełniona. Zatem bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x < y$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje taki punkt $\xi \in (x,y) \subset (0,\pi/2)$ dla którego

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\ln(2-\sin x) - \ln(2-\sin y)}{x-y}. \tag{2}$$

Obliczymy teraz pochodną funkcji f. Dla każdego $z \in (0,\pi/2)$ mamy

$$f'(z) = \frac{-\cos z}{2-\sin z}. \tag{3}$$

Łatwo zauważyć, że powyższe wyrażenie jest ujemne dla wszystkich $z \in (0,\pi/2)$. Zatem $|f'(z)| = \frac{\cos z}{2-\sin z}$ dla każdego $z \in (0,\pi/2)$.

Z (2) oraz (3) wynika, że aby udowodnić (1) wystarczy pokazać, że dla każdego $z \in (0,\pi/2)$ zachodzi

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Co jest różnoważne nierówności

$$\frac{\cos z}{2-\sin z} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z \in (0,\pi/2). \tag{5}$$

Sposób 1. Mnożąc obie strony (5) przez $\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\sin z)$ otrzymujemy, że powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$\begin{gathered}
\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos z \leqslant 1 - \tfrac{1}{2}\sin z \\
\Updownarrow \\
\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos z + \tfrac{1}{2}\sin z \leqslant 1 \\
\Updownarrow \\
\sin(\pi/3)\cos z + \cos(\pi/3)\sin z \leqslant 1 \\
\Updownarrow \\
\sin(\pi/3 + z) \leqslant 1.
\end{gathered}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $z \in \mathbb{R}$, w szczególności dla wszystkich $z \in (0, \pi/2)$. To kończy dowód $\square$

Sposób 2. Wykażemy nierówność (5) poprzez badanie funkcji $g(z) = \frac{\cos z}{2-\sin z}$ dla $z \in (0, \pi/2)$.

Zauważmy, że $2 - \sin z \neq 0$ dla każdego $z \in \mathbb{R}$ zatem funkcja g jest różniczkowalna na przedziale $(0, \pi/2)$. Obliczymy pochodną g:

$$g'(z) = \left(\frac{\cos z}{2 - \sin z}\right)' = \frac{-\sin z(2 - \sin z) - \cos z(-\cos z)}{(2 - \sin z)^2} = \frac{1 - 2\sin z}{(2 - \sin z)^2}.$$

Mamy $(2 - \sin z)^2 > 0$ stąd z powyższego obliczenia otrzymujemy, że

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin z = 0 \Leftrightarrow \sin z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{6} \quad \text{(gdyż } z \in (0, \pi/2)),$$

$$g'(z) > 0 \quad \text{dla } z \in (0, \pi/6)$$

oraz

$$g'(z) < 0 \quad \text{dla } z \in (\pi/6, \pi/2).$$

Czyli g rośnie na przedziale $(0, \pi/6)$, maleje na przedziale $(\pi/6)$, a zatem g ma w punkcie $z = \pi/6$ maksimum na przedziale $(0, \pi/2)$. To znaczy dla każdego $z \in (0, \pi/2)$ mamy $g(z) \leqslant g(\pi/6)$. Obliczamy

$$\frac{\cos z}{2 - \sin z} = g(z) \leqslant g(\pi/6) = \frac{\cos(\pi/6)}{2 - \sin(\pi/6)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Co daje (5).

$\square$