Zadanie 1 Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba $a \geqslant 1$, że funkcja zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna.

Rozwiązanie Wyznaczam pochodną prawostronną w zerze:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^a \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{a-1}\sin\frac{1}{h}.$$

Gdy $a > 1$, to prawostronna pochodna jest równa zero, gdyż

$$|h^{a-1}\sin\frac{1}{h}| \leqslant |h^{a-1}| \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $a > 1$ prawostronna pochodna $f'_{-}(0) = 0$. Gdy $a = 1$, to badana granica nie istnieje, gdyż przyjmuje ona postać $\lim_{h\to 0^+} \sin\frac{1}{h}$. Nieistnienie tej granicy było pokazywane na wykładzie (można było się na nie powołać), można je też wykazać biorąc zbieżne do zera ciągi $x_n = \frac{1}{n\pi}$ i $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0 \quad \sin\frac{1}{y_n} = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1.$$

Wyznaczam pochodną lewostronną w zerze

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos h - 1}{h^2} = \lim_{h\to 0+} \frac{1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2) - 1}{h^2} = -\frac{1}{2}.$$

Wynika stąd, że nie istnieje $a \geqslant 1$, dla którego funkcja f jest różniczkowalna.

Najczęstszy błąd pojawiający się w rozwiązaniach. Zamiast liczyć pochodną prawostronną za pomocą ilorazu różnicowego liczyli Państwo:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

i sprawdzali ich równość. Ta metoda nie jest poprawna, gdyż z nieistnienia takiej jednostronnej granicy nie wynika niestnienie pochodnej jednostronnej. Rozpatrzmy przypadek naszej funkcji i $a = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}.$$

Ta granica nie istieje gdyż pierwszy składnik zbiega do zera, a drugi nie ma granicy. Z poprawnego rozumowania przedstawionego w rozwiązaniu zadania wynika jednak, że pochodna prawostronna funkcji f danej w zadaniu istnieje i jest równa zero.

Do policzenia lewostronnej pochodnej można było zastosować tę metodę, ale należało powołać się na odpowiedni fakt (jeśli był udowodniony na ćwiczeniach):

Stwierdzenie 1 *Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w a i różniczkowalna na (a,b) oraz istnieje skończona granica $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, to istnieje prawostronna pochodna f w a i zachodzi równość $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$.*

Jeśli ktoś na odpowiednie twierdzenie się nie powołał(nie sformułował go, nie sprawdził założeń), a przy okazji wykorzystywał jego fałszywą wersję w przypadku gdy granica pochodnej nie istnieje, to dostawał za swoje rozwiązanie zero punktów, jeśli ktoś liczył w ten sposób sposób tylko tę granicę, do policzenia której można było to stwierdzenie zastosować (ale nie formułował go) to w zależności od innych rzeczy, które pojawiały się w pracy dostawał 0-2 punkty.

Dowód stwierdzenia

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} \overset{Lagr.}{=} \lim_{h\to 0^+} f'(c_h), \text{ gdzie } 0 < c_h < h.$$

Z istnienia granicy $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ wynika istnienie $\lim_{h\to 0^+} f'(c_h)$, bo $c_h \to 0$, gdy $h \to 0$. Co więcej z twierdzenia o granicy złożenia wynika równość tych granic. $\square$