**Zadanie 5** Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\Big(\frac{k}{n}\Big) = 0.$$

Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f'(x) - f'(y)|.$$

---

**Rozwiązanie.** Ponieważ $f$ jest ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym (zbiorze zwartym), to jest jednostajnie ciągła czyli:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} \text{ taka, że } \forall_{x,y\in[0,1]}\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ustalmy (dowolnie) $\varepsilon > 0$ i dobierzmy do niego $\delta > 0$ tak by $\forall_{x,y\in[0,1]}\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Następnie położmy $N = \lceil 1/\delta \rceil$. Zauważmy, że dla $n > N$ zachodzi nierówność $|f(k/n) - f((k+1)/n)| < \varepsilon$, skąd

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}\Big|-f\Big(\frac{2k-1}{n}\Big)+f\Big(\frac{2k}{n}\Big)\Big|+\Big|\frac{f(1)}{n}\Big| < \frac{1}{n}\cdot\lfloor n/2\rfloor\cdot\varepsilon+\Big|\frac{f(1)}{n}\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\Big|\frac{f(1)}{n}\Big|.$$

Dobierzmy teraz $N_2 \geqslant N$ tak by dla $n > N_2$ zachodziła nierówność $\left|\frac{f(1)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Otrzymujemy zatem dla $n > N_2$

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| < \varepsilon.$$

Teza wynika z dowolności wyboru $\varepsilon > 0$.